

融合权值分布式最大相关熵卡尔曼滤波^{*}

徐秋灵^{1,2} 张鹏^{1,2} 刘鹏^{2,3}

(1. 中北大学仪器与电子学院 太原 030051; 2. 中北大学电子测试技术国家重点实验室 太原 030051;
3. 中北大学电气与控制工程学院 太原 030051)

摘要:针对复杂传感器网络环境中存在非高斯噪声和传感器测量信息缺失的现象,基于融合权值设计了分布式卡尔曼滤波器。利用最大相关熵准则来设计卡尔曼滤波器,解决非高斯噪声带来的影响。针对传感器测量信息缺失的现象,通过把一组二元随机变量建模为伯努利分布来描述。为了实现传感器节点之间的共识,采用协方差相交方法来进行分布式融合。此外,考虑到传统的权值设计方法难以提升信息融合的精度,因此通过引入虚拟估计误差和置信水平函数,权值以传感器置信水平的比例形式进行完全分布和自适应设计。仿真实验表明,所提算法在非高斯噪声和丢包环境下表现出了良好的性能,与传统的分布式卡尔曼滤波相比,估计精度提升了27.68%。

关键词:分布式卡尔曼滤波;最大相关熵;协方差相交;虚拟估计误差

中图分类号: TN911.4 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.40

Fusion weight distributed maximum correntropy Kalman filter

Xu Qiuling^{1,2} Zhang Peng^{1,2} Liu Peng^{2,3}

(1. School of Instrumentation and Electronics, North University of China, Taiyuan 030051, China;
2. State Key Laboratory of Electronic Testing Technology, North Central University, Taiyuan 030051, China;
3. School of Electrical and Control Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, China)

Abstract: Aiming at the phenomenon of non-Gaussian noise and missing sensor measurement information in complex sensor network environment, a distributed Kalman filter is designed based on the fusion weights. In this paper, the maximum correntropy criterion is utilized to design the Kalman filter to address the effects of non-Gaussian noise. To describe the phenomenon of missing sensor measurement information, a set of binary random variables is modeled as a Bernoulli distribution. In order to achieve consensus among sensor nodes, covariance intersection method is used for distributed fusion. In addition, considering that it is difficult to improve the accuracy of information fusion with the traditional weight design method, the weights are fully distributed and adaptively designed in the form of proportions of the sensor's confidence level through the introduction of the virtual estimation error and confidence level function. The simulation experiment shows that the proposed algorithm exhibits good performance in non-Gaussian noise and packet drops, and improves the estimation accuracy by 27.68% compared with the traditional distributed Kalman filter.

Keywords: distributed Kalman filter; maximum correntropy; covariance intersection; virtual estimation error

0 引言

卡尔曼滤波(Kalman filter, KF)及其扩展形式已被广泛用于导航定位^[1]、状态估计^[2-3]等各个方面。随着多传感器网络和协同技术的发展,分布式卡尔曼滤波(distributed Kalman filter, DKF)受到了越来越多的关注和研

究。相比于集中式卡尔曼滤波(centralized Kalman filter, CKF)来说,DKF没有融合中心,各个传感器单独进行滤波工作^[4]。这种处理方式虽然在一定程度损失了估计器的精度,但是减少了通信量和计算量,增加了传感器网络设计的灵活性和对节点发生故障的鲁棒性。另外,通过设计合适的分布式融合算法能够逼近集中式的估计精度。

收稿日期:2024-09-05

^{*} 基金项目:国家国防基金(2023-JCJQ-JJ-0353)、国家自然科学基金(62373247)项目资助

因此,DKF已广泛用于传感器网络^[5]、协同导航^[6]、智能电网^[7]等多个领域。

传统的KF以及扩展卡尔曼滤波(extended Kalman filter, EKF)、无迹卡尔曼滤波(unscented Kalman filter, UKF)等都是基于均方误差准则来推导的,该准则对较大的异常值比较敏感,且无法捕获测量的高阶矩信息^[8],只能在高斯噪声条件下才能发挥出最优的效果。然而,在无线传感器网络中,传感器节点之间的通信受到多路径效应、干扰信号等的影响,这些干扰通常表现为脉冲噪声或其他非高斯噪声。非高斯噪声的存在会严重影响估计器精度,甚至会导致滤波器发散。近年来,信息理论学习中最大相关熵准则(maximum correntropy criterion, MCC)的出现,能够克服基于均方误差准则的缺陷,为解决KF中非高斯噪声问题提供了一种解决思路。Izanloo等^[9]基于MCC改写了传统KF的代价函数,提出了一种相关熵卡尔曼滤波器,但该滤波器的推导和计算过程较为粗糙,难以获得较高的估计精度。Chen等^[10]基于MCC提出一种新的KF算法,其使用不动点迭代算法来更新后验估计,所提算法在非高斯噪声下表现良好。随后,基于MCC的KF逐渐被扩展到分布式的形式。Wang等^[11]推导了集中式形式下的最大相关熵卡尔曼滤波器,然后利用平均共识方法将其扩展到分布式框架下。Hu等^[12]使用MCC得到的矩阵权值来提高估计精度,并使用协方差相交法来进行分布式融合,获得了不错的效果。

在传感器获得测量信息的过程中,由于传感器节点发生故障、恶劣环境干扰等原因,可能导致节点测量信息缺失,也就是丢包现象的发生。针对这一问题,已经有许多研究者提出了有效的对策,比如采用时间戳技术^[13]、传输容量法^[14]等策略来设计滤波器进行传感器网络中的状态估计。Zhang等^[15]研究了在丢包情况下离线计算估计增益的卡尔曼滤波器,Yu等^[16]采用服从伯努利分布的二元随机变量来对丢包现象进行建模,这些方法都有效解决了丢包问题。

DKF的主要任务是利用分布式融合算法来逼近集中式的估计精度。目前,常用的分布式融合算法可以分为共识和扩散方式两类^[17]。共识是一项致力于利用邻居及自身节点信息使每个传感器的状态信息达成一致的研究^[18],包括对状态估计^[19]、局部新息^[20]、信息矩阵和信息向量^[21]达成共识。Olfati-Saber等^[22]提出的加权平均共识是最常用的共识策略,该策略通过节点之间的局部通信来得到节点初始值的算术平均值。扩散策略的目的是融合由滤波更新的领域估计,利用相邻估计的凸组合来获得每个传感器的最终估计^[23]。Feng等^[24]将扩散规则用于节点信息的融合,所设计的分布式最小误差熵卡尔曼滤波算法具有较好的估计精度。

分布式融合策略大多是通过传感器节点之间的通信,利用自身和邻居信息来获得最终的估计。在这个过程中

往往需要进行权值的设计^[25],融合权值设计不当可能会导致滤波器精度降低或者系统不稳定。Liu等^[26]使用Metropolis权进行融合,该权值选取虽然只需要知道节点的度,但其是时不变的,对于某些复杂的网络结构来说,权重可能分布不均匀,进行影响算法的性能。Zhang等^[27]利用拉普拉斯矩阵的特征值表征共识增益和权重的可行性条件。但是,该特征值依赖于整个网络结构,导致权值的设计比较复杂。为了克服传感器物理特性和通信网络的限制,Li等^[28]在传感器残差测量的基础上,设计了一种基于传感器截断测量的加权规则,但该规则是针对加权平均共识方法的设计,并没有考虑如何设计协方差相交法的权值。

上述方法缺少对分布式最大相关熵卡尔曼滤波(distributed maximum correntropy Kalman filter, DMCKF)中融合权值设计的研究。本文旨在设计分布式最大相关熵卡尔曼滤波器来处理传感器网络中非高斯噪声和传感器测量信息缺失的问题。同时,为了进一步提升滤波器的估计精度和系统鲁棒性,进行分布式融合权值的设计。

本文算法将伯努利分布模型引入到了测量方程中,并利用最大相关熵准则来设计分布式卡尔曼滤波,有效解决了非高斯噪声和传感器测量信息缺失现象带来的影响。分布式融合策略采用协方差相交法,该方法只需要节点之间通信一次,减小了通信负担。同时,基于虚拟估计误差和置信水平函数进行融合权值的设计。仿真实验证明,相比于传统权值设计方法来说,本文所设计的方法具有更高的融合估计精度。在无向连通图和全局可观性条件下,证明了所提基于融合权值设计的分布式最大相关熵卡尔曼滤波算法的稳定性。

1 准备知识与问题描述

1.1 相关熵

相关熵是用来度量两个随机变量之间相似性的一种方法,已被广泛应用于非高斯噪声下的数字信号处理。给定两个具有联合概率密度函数 $f_{XY}(x,y)$ 的随机变量 $X,Y \in \mathbf{R}$,熵的定义如下:

$$V(X,Y) = E[\kappa(X,Y)] = \iint \kappa(x,y) f_{XY}(x,y) dx dy \quad (1)$$

式中: E 为期望符号; $\kappa(\cdot,\cdot)$ 表示满足Mercer定理的核函数。本文选取最常用的高斯核作为核函数。

$$\kappa(x,y) = G_\sigma(x-y) = G_\sigma(e) = \exp\left(-\frac{e^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2)$$

式中: $\sigma > 0$ 为核带宽。在大多数实际场景中,联合概率密度函数通常是未知的,使用样本均值估计器对熵进行估计:

$$\hat{V}(X,Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N G_\sigma(e(i)) \quad (3)$$

式中: $e(i) = x(i) - y(i)$; N 代表采样的数量。

为了便于对相关熵进行分析,将其进行泰勒展开

得到:

$$V(X, Y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \sigma^{2n} n!} E[(X - Y)^{2n}] \quad (4)$$

从上述公式可以看出,相关熵包含变量 $X - Y$ 的所有偶阶矩信息,因而能够获得信号的高阶统计量,被用于处理非高斯噪声。

1.2 图论

传感器网络通过一个无向连通图 $G = \{\nu, \epsilon\}$ 来描述。其中 $\nu = \{1, 2, \dots, N\}$ 表示传感器节点集合, $\epsilon \subseteq \nu \times \nu$ 表示边的集合。边 $(i, j) \in \epsilon$ 表示节点 i 和节点 j 相连接,它们之间能够相互通信,互为邻居节点。节点 i 及其所有邻居节点表示为 \mathcal{N}_i 。另外,节点的度是其边的数目。如果任何两个节点之间都有一条路径来连接它们,则称该无向图是强连通的。

1.3 问题描述

假设传感器网络中有 N 个节点,考虑如下具有加性噪声的状态空间模型:

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (5)$$

$$\mathbf{z}_k^i = \mathbf{H}_i \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k^i \quad (6)$$

式中: $\mathbf{x}_k \in \mathbf{R}^n$ 是状态向量; $\mathbf{z}_k^i \in \mathbf{R}^m$ 为量测向量; $\mathbf{F} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 和 $\mathbf{H}_i \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 分别代表状态转移矩阵和量测矩阵; $\mathbf{w}_k \in \mathbf{R}^n$ 是零均值的过程噪声,其协方差矩阵为 $\mathbf{Q}_k \geq 0$; $\mathbf{v}_k^i \in \mathbf{R}^m$ 表示第 i 个传感器的量测噪声,其协方差矩阵为 $\mathbf{R}_k^i \geq 0$ 。假设过程噪声和量测噪声互不相关,每个传感器的量测噪声之间也不相关。

在实际应用中,尽管每个传感器都有量测过程,但是由于传感器自身损坏等或是外部复杂环境的干扰,部分传感器在某些时刻的测量信息可能缺失。本文通过一组服从伯努利分布的二元随机变量 $\boldsymbol{\beta}_k = [\beta_k^1, \dots, \beta_k^n]$ 来描述这种现象的传感器拓扑。当 $\beta_k^i = 1$ 时,表示传感器 i 能够获得时刻 k 的测量信息;当 $\beta_k^i = 0$ 时,表示传感器 i 在 k 时刻的测量信息缺失。此时,量测方程变为:

$$\mathbf{z}_k^i = \beta_k^i \mathbf{H}_i \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k^i \quad (7)$$

同时,本文还考虑了过程噪声 \mathbf{w}_k 和量测噪声 \mathbf{v}_k^i 中分布着非高斯噪声时的情况。

2 算法设计

集中式卡尔曼滤波将 N 个量测方程堆叠在一起,然后在一个中心滤波器中集中处理,这种方式具有大的计算量和通信负担。旨在设计分布式形式的最大相关熵卡尔曼滤波器,并进行融合权值的设计。通过所提算法能够提升传感器融合精度,解决非高斯噪声和传感器量测信息缺失问题。

2.1 分布式最大相关熵卡尔曼滤波

分布式最大相关熵卡尔曼滤波的预测步骤与基于均方误差准则的 KF 相同,其状态一步预测和状态一步预测均方误差阵分别为:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^i = \mathbf{F}\mathbf{x}_{k-1}^i \quad (8)$$

$$\mathbf{P}_{k/k-1}^i = \mathbf{F}\mathbf{P}_{k-1}^i \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}_{k-1} \quad (9)$$

式中: \mathbf{x}_{k-1}^i 代表传感器 i 在 $k-1$ 时刻的最终估计值; \mathbf{P}_{k-1}^i 表示传感器 i 在 $k-1$ 时刻的最终均方误差阵。分别对 $\mathbf{P}_{k/k-1}^i$ 和 \mathbf{R}_k^i 进行乔里斯基分解得到 \mathbf{B}_{pk}^i 和 \mathbf{B}_{rk}^i , 如下:

$$\mathbf{P}_{k/k-1}^i = \mathbf{B}_{pk}^i \mathbf{B}_{pk}^{iT} \quad (10)$$

$$\mathbf{R}_k^i = \mathbf{B}_{rk}^i \mathbf{B}_{rk}^{iT} \quad (11)$$

根据状态方程(式(5))和量测方程(式(7)),定义残差为:

$$\mathbf{e}_{k,l}^i = \mathbf{d}_k^i - \mathbf{W}_k^i \mathbf{x}_k \quad (12)$$

其中, \mathbf{d}_k^i 和 \mathbf{W}_k^i 分别如下:

$$\mathbf{d}_k^i = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_{pk}^i)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^i \\ (\mathbf{B}_{rk}^i)^{-1} \mathbf{z}_k^i \end{bmatrix}, \mathbf{W}_k^i = \begin{bmatrix} (\mathbf{B}_{pk}^i)^{-1} \\ \beta_k^i (\mathbf{B}_{rk}^i)^{-1} \mathbf{H}_i \end{bmatrix} \quad (13)$$

基于 MCC 的代价函数为:

$$J_L(\mathbf{x}_k^i) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L G_\sigma(\mathbf{e}_{k,l}^i) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L G_\sigma(\mathbf{d}_{k,l}^i - \mathbf{W}_{k,l}^i \mathbf{x}_k) \quad (14)$$

式中: $\mathbf{e}_{k,l}^i$ 是 \mathbf{e}_k^i 的第 l 个元素; $\mathbf{d}_{k,l}^i$ 是 \mathbf{d}_k^i 的第 l 个元素; $\mathbf{W}_{k,l}^i$ 是 \mathbf{W}_k^i 的第 l 行元素; $L = n + m$ 。通过优化代价函数,得到中间状态估计 $\hat{\mathbf{x}}_k^i$ 为:

$$\hat{\mathbf{x}}_k^i = \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}_k^i} J_L(\mathbf{x}_k^i) = \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}_k^i} \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L G_\sigma(\mathbf{e}_{k,l}^i) \quad (15)$$

令 $\frac{\partial J_L(\mathbf{x}_k^i)}{\partial \mathbf{x}_k^i} = 0$, 使用文献[10]的不动点迭代方法

来计算 $\hat{\mathbf{x}}_k^i$, 得到:

$$\hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^i + \beta_k^i \bar{\mathbf{K}}_k^i (\mathbf{z}_k^i - \mathbf{H}_i \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^i) \quad (16)$$

式中: $\hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i$ 表示第 t 次不动点迭代的结果。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{K}}_k^i &= \bar{\mathbf{P}}_{k/k-1}^i \mathbf{H}_i^T (\mathbf{H}_i \bar{\mathbf{P}}_{k/k-1}^i \mathbf{H}_i^T + \bar{\mathbf{R}}_k^i)^{-1} \\ \bar{\mathbf{P}}_{k/k-1}^i &= \mathbf{B}_{pk}^i (\boldsymbol{\chi}_k^i)^{-1} \mathbf{B}_{pk}^{iT}, \bar{\mathbf{R}}_k^i = \mathbf{B}_{rk}^i (\mathbf{f}_k^i)^{-1} \mathbf{B}_{rk}^{iT} \end{aligned} \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\chi}_k^i = \operatorname{diag}[G_\sigma(\mathbf{e}_{k,1}^i), \dots, G_\sigma(\mathbf{e}_{k,n}^i)]$$

$$\mathbf{f}_k^i = \operatorname{diag}[G_\sigma(\mathbf{e}_{k,n+1}^i), \dots, G_\sigma(\mathbf{e}_{k,L}^i)]$$

不动点迭代的截止条件通过比较当前步估计与上一步估计来获得:

$$\frac{\|\hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k,t-1}^i\|}{\|\hat{\mathbf{x}}_{k,t-1}^i\|} \leq \epsilon \quad (18)$$

其中, ϵ 是一个很小的正值,初始迭代值设置为 $\hat{\mathbf{x}}_{k,0}^i = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^i, t = 1, 2, \dots, T$ 。

通过不动点迭代法获得传感器估计 $\hat{\mathbf{x}}_k^i = \hat{\mathbf{x}}_{k,T}^i$ 后,对后验协方差矩阵进行更新,得到一个中间均方误差阵:

$$\mathbf{V}_k^i = ((\mathbf{F}\mathbf{P}_{k-1}^i \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}_{k-1})^{-1} + \beta_k^i \mathbf{H}_i^T (\mathbf{R}_k^i)^{-1} \mathbf{H}_i)^{-1} \quad (19)$$

每个传感器节点通过无向连通图上进行信息交互来实现分布式融合。在系统演化时间之间,节点 i 将其更新信息 $\hat{\mathbf{x}}_k^i$ 和 \mathbf{V}_k^i 传递给它的邻居。当节点接受来自邻居

居的信息对 $(\hat{\mathbf{x}}_k^i, \mathbf{V}_k^i)$ 后, 这些节点通过协方差相交法进行信息融合, 以获得精确的估计值。协方差相交融合方法表示如下:

$$(\mathbf{P}_k^i)^{-1} = \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\mathbf{V}_k^j)^{-1} \quad (20)$$

$$\mathbf{x}_k^i = \mathbf{P}_k^i \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\mathbf{V}_k^j)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_k^j \quad (21)$$

式中: $0 \leq \omega_{ij} \leq 1$ 是融合权值, 满足 $\sum_{j \in \mathcal{N}_i} \omega_{ij} = 1$ 。参数 ω_{ij}

可以表示节点 i 和节点 j 的连通性以及信息交换的系数。如果 $\omega_{ij} = 0$, 代表两个节点没有连通, 无法进行信息交互; 如果 ω_{ij} 的值越大, 两个节点之间的相互影响就越大。权值的设计是提升分布式融合算法精度的关键。

2.2 融合权值设计

定义传感器 i 的中间估计误差为 $\tilde{\mathbf{x}}_k^i = \hat{\mathbf{x}}_k^i - \mathbf{x}_k$, $\hat{\mathbf{P}}_k^i = E(\tilde{\mathbf{x}}_k^i \tilde{\mathbf{x}}_k^{iT} | G(0), \dots, G(k-1))$ 为传感器 i 的 k 时刻误差在以前通信拓扑 $G(0), \dots, G(k-1)$ 上的条件协方差。

对于任意节点, 根据式(5)、(6)、(8)、(16)、(21)得到 $\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^i$ 以及式(19)、(20)得到 \mathbf{V}_{k+1}^i 为:

$$\tilde{\mathbf{x}}_{k+1}^i = (\mathbf{I}_n - \beta_{k+1}^i \bar{\mathbf{K}}_{k+1}^i \mathbf{H}_i) \mathbf{F} \mathbf{P}_k^i \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\mathbf{V}_k^j)^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k^j + \beta_{k+1}^i \bar{\mathbf{K}}_{k+1}^i \mathbf{v}_{k+1}^i - (\mathbf{I}_n - \beta_{k+1}^i \bar{\mathbf{K}}_{k+1}^i \mathbf{H}_i) \mathbf{w}_k \quad (22)$$

$$\mathbf{V}_{k+1}^i = [(\mathbf{F} (\sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\mathbf{V}_k^j)^{-1})^{-1} \mathbf{F}^T + \mathbf{Q}_k)^{-1} + \beta_{k+1}^i \mathbf{H}_i^T (\mathbf{R}_{k+1}^i)^{-1} \mathbf{H}_i]^{-1} \quad (23)$$

对于任意节点 i , 满足 $\hat{\mathbf{P}}_{k+1}^i \leq \mathbf{V}_{k+1}^i$ 。因此如果序列 $\{\mathbf{V}_k^i, k \geq 0\}$ 是有界的, 则均方估计误差 $E(\|\tilde{\mathbf{x}}_k^i\|^2 | G(0), \dots, G(k-1))$ 也一定是有界的。本文把 \mathbf{V}_k^i 和迹 $\text{tr}(\mathbf{V}_k^i)$ 分别称为传感器 i 在时刻 k 的虚拟估计误差协方差矩阵和虚拟估计误差。

在进行权值设计之前, 首先需要定义一个连续单调递减的置信水平函数 $c(\cdot)$, 满足如下条件。

$$1) \forall r \geq 0, c(r) \geq 0;$$

2) 存在一个有界常数 $r_0 > 0$, 使得 $r_2 > r_1 \geq r_0$ 时, $r_2 c(r_2) \leq r_1 c(r_1) \leq r_0 c(r_0)$ 。

如果 $j \notin \mathcal{N}_i$, 则 $\omega_k^{ij} = 0$; 如果 $j \in \mathcal{N}_i$, 其传感器 i 的置信水平为 $c(\text{tr}(\mathbf{V}_k^j))$, 则边 (i, j) 的权值设计为:

$$\omega_k^{ij} = \frac{c(\text{tr}(\mathbf{V}_k^j))}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} c(\text{tr}(\mathbf{V}_k^j))} \quad (24)$$

注 1. \mathbf{V}_k^i 由过程噪声协方差 \mathbf{Q}_k 和测量噪声协方差 \mathbf{R}_k 组成, 因此可以用来度量 k 时刻相关维度噪声干扰下的估计精度。本文使用 \mathbf{V}_k^i 的迹来表征每个维度噪声对估计精度的影响, 并进行局部节点最优融合权值的设计。

注 2. 置信水平函数可以有多种选择, 比如 $a^r (0 \leq a < 1)$, $\frac{1}{r^a} (a \geq 1)$ 等, 其要求是单调递减且有界的。利用虚拟估计误差和置信水平函数所设计的融合权值是随时

刻 k 变化的, 相比于传统权值选取方法来说, 增强了系统的鲁棒性和抗干扰能力。

本文所设计的基于融合权值的分布式相关熵卡尔曼滤波算法(FWDMCKF)流程如下。

算法 1 FWDMCKF

-
- 初始化: 设置 $\hat{\mathbf{x}}_0^i, \mathbf{P}_0^i$ 和一个合适的核带宽 $\sigma, \forall i \in \nu$
- 1: For 传感器 i :
 - 2: 使用式(8)和(9)更新 $\hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^i$ 和 $\mathbf{P}_{k/k-1}^i$;
 - 3: 通过式(10)和(11)得到 \mathbf{B}_{pk}^i 和 \mathbf{B}_{rk}^i ;
 - 4: 不动点迭代算法的初值设置为 $\hat{\mathbf{x}}_{k,0}^i = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^i$;
 - 5: for $t = 1, 2, \dots, T$
 - 6: $\hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i = \hat{\mathbf{x}}_{k/k-1}^i + \beta_k^i \bar{\mathbf{K}}_k^i (\mathbf{z}_k^i - \mathbf{H}_i \hat{\mathbf{x}}_{k/t-1}^i)$
 - 7: 当满足条件 $\|\hat{\mathbf{x}}_{k,t}^i - \hat{\mathbf{x}}_{k,t-1}^i\| / \|\hat{\mathbf{x}}_{k,t-1}^i\| \leq \epsilon$ 时, 停止不动点迭代;
 - 8: end for
 - 9: 更新估计值 $\hat{\mathbf{x}}_k^i = \hat{\mathbf{x}}_{k,T}^i$, 使用式(19)更新协方差矩阵;
 - 10: 使用式(24)更新权值 ω_k^{ij} ;
 - 11: 进行协方差相交局部融合;
 - 12: $(\mathbf{P}_k^i)^{-1} = \sum_{j=1}^N \omega_k^{ij} (\mathbf{V}_k^j)^{-1}$; $\mathbf{x}_k^i = \mathbf{P}_k^i \sum_{j=1}^N \omega_k^{ij} (\mathbf{V}_k^j)^{-1} \hat{\mathbf{x}}_k^j$;
- 输出: \mathbf{x}_k^i 和 \mathbf{P}_k^i
-

2.3 收敛性分析

首先分析不使用协方差相交法时算法的平均误差行为, 根据式(22)可以得到 $\tilde{\mathbf{x}}_k^i = \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^i$ 为:

$$\tilde{\mathbf{x}}_k^i = (\mathbf{I}_n - \beta_k^i \bar{\mathbf{K}}_k^i \mathbf{H}_i) \mathbf{F} \tilde{\mathbf{x}}_{k-1}^i + (\mathbf{I}_n - \beta_k^i \bar{\mathbf{K}}_k^i \mathbf{H}_i) \mathbf{w}_{k-1} - \beta_k^i \bar{\mathbf{K}}_k^i \mathbf{v}_k^i \quad (25)$$

由于 \mathbf{w}_{k-1} 和 \mathbf{v}_k^i 是零均值的噪声, 对式(25)两边求期望得出:

$$\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{x}}_k^i) = (\mathbf{I}_n - \beta_k^i \bar{\mathbf{K}}_k^i \mathbf{H}_i) \mathbf{F} \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}^i) \quad (26)$$

通常情况下, 状态转移矩阵 \mathbf{F} 、量测矩阵 \mathbf{H}_i 和滤波增益 $\bar{\mathbf{K}}_k^i$ 都是稳定的, 因此式(26)表明算法是稳定且无偏的。

接下来考虑均方误差行为, $\tilde{\mathbf{x}}_k^i$ 的协方差矩阵可以表示为:

$$\mathbf{E}(\tilde{\mathbf{x}}_k^i \tilde{\mathbf{x}}_k^{iT}) = \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{x}}_{k-1}^i \tilde{\mathbf{x}}_{k-1}^{iT}) \mathbf{\Gamma}_k^T + (\mathbf{I}_n - \beta_k^i \bar{\mathbf{K}}_k^i \mathbf{H}_i) \mathbf{Q}_{k-1} (\mathbf{I}_n - \beta_k^i \bar{\mathbf{K}}_k^i \mathbf{H}_i)^T + \beta_k^i \bar{\mathbf{K}}_k^i \mathbf{R}_k^i \bar{\mathbf{K}}_k^{iT} \quad (27)$$

式中: $\mathbf{\Gamma}_k = (\mathbf{I}_n - \beta_k^i \bar{\mathbf{K}}_k^i \mathbf{H}_i) \mathbf{F}$ 。

设置如下:

$$\mathbf{\Phi}_k = \mathbf{E}(\tilde{\mathbf{x}}_k^i \tilde{\mathbf{x}}_k^{iT})$$

$$\mathbf{\Psi}_k = (\mathbf{I}_n - \beta_k^i \bar{\mathbf{K}}_k^i \mathbf{H}_i) \mathbf{Q}_{k-1} (\mathbf{I}_n - \beta_k^i \bar{\mathbf{K}}_k^i \mathbf{H}_i)^T + \beta_k^i \bar{\mathbf{K}}_k^i \mathbf{R}_k^i \bar{\mathbf{K}}_k^{iT} \quad (28)$$

$$\mathbf{\Phi}_k = \mathbf{\Gamma}_k \mathbf{\Phi}_{k-1} \mathbf{\Gamma}_k^T + \mathbf{\Psi}_k$$

系统模型中 $\mathbf{F}, \mathbf{H}_i, \beta_k^i$ 是时不变的。假设 $\mathbf{Q}_k, \mathbf{R}_k^i, \bar{\mathbf{K}}_k^i$

是时不变的,则 Γ_k 、 Ψ_k 变成时不变的。此时 Φ_k 是收敛的。本文把时不变的参数总结如下:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi_k = \Phi, \lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k = \Gamma, \lim_{k \rightarrow \infty} \Psi_k = \Psi \quad (29)$$

因此式(28)简化为实离散 Lyapunov 方程:

$$\Phi = \Gamma \Phi \Gamma^T + \Psi \quad (30)$$

其封闭形式的解为:

$$\text{Vec}(\Phi) = (\mathbf{I} - \Gamma \otimes \Gamma^T)^{-1} + \text{Vec}(\Psi) \quad (31)$$

式中: \otimes 为克罗内克积。

根据平均误差行为和均方误差行为分析,证明了不使用协方差相交法的 DMCKF 是收敛的。在此基础上,对基于融合权值的 DMCKF 进行收敛性分析,其估计误差可以表示为:

$$\begin{aligned} \epsilon_k^i &= \mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^i = \mathbf{P}_k^i \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\mathbf{V}_k^j)^{-1} (\mathbf{x}_k - \hat{\mathbf{x}}_k^j) = \\ & \mathbf{P}_k^i \sum_{j=1}^N \omega_{ij} (\mathbf{V}_k^j)^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k^j \end{aligned} \quad (32)$$

把式(24)代入式(32),并对 ϵ_k^i 求期望可得:

$$\mathbf{E}\{\epsilon_k^i\} = \mathbf{P}_k^i \sum_{j=1}^N \frac{c(\text{tr}(\mathbf{V}_k^j))}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} c(\text{tr}(\mathbf{V}_k^j))} (\mathbf{V}_k^j)^{-1} \mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_k^j\} \leq$$

$$\max\{\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_k^j\} \mid j \in \mathcal{N}_i\} \quad (33)$$

其中, $\max\{\cdot\}$ 寻找集合 $\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_k^j\} \mid j \in \mathcal{N}_i$ 的最大元素的运算。同时, \mathbf{V}_k^j 是时不变的,邻居的节点是可数的,从而证明了所提出算法的平均误差行为收敛性。

考虑均方误差行为如下:

$$\mathbf{E}\{\epsilon_k^i \epsilon_k^{iT}\} = \mathbf{E}\left\{\left(\mathbf{P}_k^i \sum_{j=1}^N \frac{c(\text{tr}(\mathbf{V}_k^j))}{\sum_{j \in \mathcal{N}_i} c(\text{tr}(\mathbf{V}_k^j))} (\mathbf{V}_k^j)^{-1} \tilde{\mathbf{x}}_k^j\right)^T\right\}$$

$$\leq \max\{\mathbf{E}\{\tilde{\mathbf{x}}_k^j \tilde{\mathbf{x}}_k^{jT}\} \mid j \in \mathcal{N}_i\} \quad (34)$$

基于同样的原因,可以得出所提出算法的均方误差行为是稳定的。

3 仿真研究

为验证提出 FWDCKF 的有效性,仿真实验在 MATLAB 2022b 环境下实现,处理器为 Intel Core i7-12700,运行内存为 16 GB。无线传感器网络由 6 个节点组成,其无向连通图的分布如图 1 所示。考虑一个质点在二维平面上的目标跟踪情况,该质点在 k 时刻的状态向量由位置、速度组成,其状态方程为:

$$\mathbf{x}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{w}_{k-1} \quad (35)$$

式中: $\mathbf{x}_k = [x_{k1}, x_{k2}, x_{k3}, x_{k4}]^T$, x_{k1} 、 x_{k3} 分别表示水平方向的位置和速度, x_{k2} 、 x_{k4} 分别表示垂直方向的位置和速度; T 表示采样间隔。式(6)中量测矩阵设置为:

$$\mathbf{H}_k^1 = \mathbf{H}_k^3 = \mathbf{H}_k^5 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\mathbf{H}_k^2 = \mathbf{H}_k^4 = \mathbf{H}_k^6 = [0 \ 1 \ 0 \ 0]$$

初始参数的设置如下:

$$\mathbf{x}_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0^1 = \hat{\mathbf{x}}_0^3 = \hat{\mathbf{x}}_0^5 = [0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$\hat{\mathbf{x}}_0^2 = \hat{\mathbf{x}}_0^4 = \hat{\mathbf{x}}_0^6 = [1 \ 1 \ 0 \ 0]^T$$

$$\mathbf{P}_0^i = \text{diag}\{1, 1, 1, 1\}$$

混合高斯噪声是由几种不同参数的高斯噪声线性组合而成,其特点是能够通过调整线性组合中的均值、协方差和权重系数来生成复杂的噪声。本文设置过程噪声和量测噪声为混合高斯噪声如下:

$$\mathbf{w}_k \sim 0.5\mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}_{x1}, \mathbf{Q}_1) + 0.5\mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}_{x2}, \mathbf{Q}_2)$$

$$\mathbf{v}_k^i \sim 0.5\mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}_{y1}, \mathbf{R}_1^i) + 0.5\mathbf{N}(\boldsymbol{\mu}_{y2}, \mathbf{R}_2^i)$$

式中: $\boldsymbol{\mu}_{x1} = [-4; -4; -4; -4]$, $\boldsymbol{\mu}_{x2} = [3; 3; 3; 3]$, $\boldsymbol{\mu}_{y1} = -4$, $\boldsymbol{\mu}_{y2} = 3$, $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_2 = \text{diag}\{[0.1, 0.1, 0.1, 0.1]\}$, $\mathbf{R}_1^i = \mathbf{R}_2^i = 0.1$, $\mathbf{R}_1^3 = \mathbf{R}_2^3 = 0.2$, $\mathbf{R}_1^5 = \mathbf{R}_2^5 = 0.3$, $\mathbf{R}_1^4 = \mathbf{R}_2^4 = 0.4$, $\mathbf{R}_1^6 = \mathbf{R}_2^6 = 0.5$, $\mathbf{R}_1^2 = \mathbf{R}_2^2 = 0.6$ 。

置信水平函数选取为 $c(r) = 1/r$ 。伯努利分布模型中,测量信息的到达概率设置为 0.8。所有仿真结果执行 100 次蒙特卡罗试验,每次试验使用 200 个样本点来评估状态的均方根误差 (root mean square error, RMSE)。RMSE 的计算公式如下:

$$\text{RMSE}_k = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{100} \sum_{j=1}^{100} (\hat{\mathbf{x}}_{k,j}^i - \mathbf{x}_k)^T (\hat{\mathbf{x}}_{k,j}^i - \mathbf{x}_k) \right]}$$

根据文献[10]可知,高斯核函数中核带宽 σ 的设置会影响滤波器的性能。过小的 σ 会使滤波器发散,而过大的 σ 会使 MCKF 的效果退化传统的 KF,无法有效处理非高斯噪声。在接下来的仿真例子中,参考文献[10]的经验,设置 $\sigma = 2$, $\epsilon = 10^{-6}$ 。

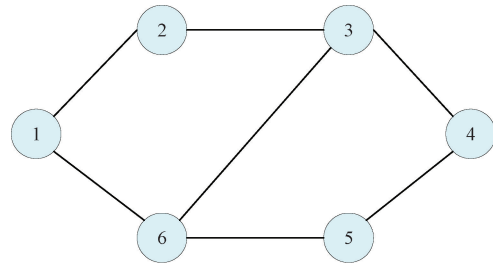


图 1 传感器网络通信拓扑

Fig. 1 Communication topology of the sensor network

为了对最大相关熵准则处理非高斯噪声的能力以及协方差相交法融合精度进行评估,本文将 FWDCKF 与 DKF、单个 KF、单个 MCKF 的性能进行对比,其中 DKF 的分布式融合方法和 FWDCKF 相同。如图 2 和表 1 所示, FWDCKF 的均方根误差是最小的,说明该算法对非高斯噪声具有鲁棒性。同时, DKF 比单个 KF 的性能提升

了 35.39%，FWD-MCKF 比单个 MCKF 的性能提升了 38.63%，表明本文方法能够保证分布式融合的精度。各个传感器节点的估计性能如图 3 所示，能够看出各节点的估计结果相差不大，保证了分布式融合算法的一致性。

表 1 混合高斯噪声下各种方法均方根误差比较
Table 1 Comparison of RMSE of various methods under mixed-Gaussian noise

滤波器	x_{k1}	x_{k2}	x_{k3}	x_{k4}
KF	2.747	2.691	2.963	2.930
DKF	1.744	1.645	2.056	1.988
MCKF	2.122	2.073	2.279	2.256
FWD-MCKF	1.251	1.189	1.479	1.439

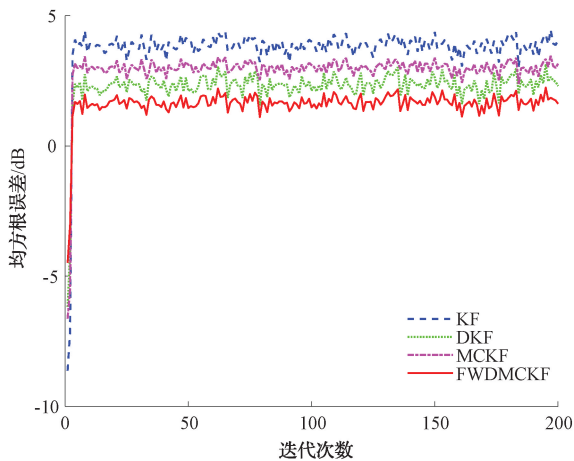


图 2 不同滤波方法在混合高斯噪声下的 RMSE
Fig. 2 RMSE of different filter methods under mixed-Gaussian noise

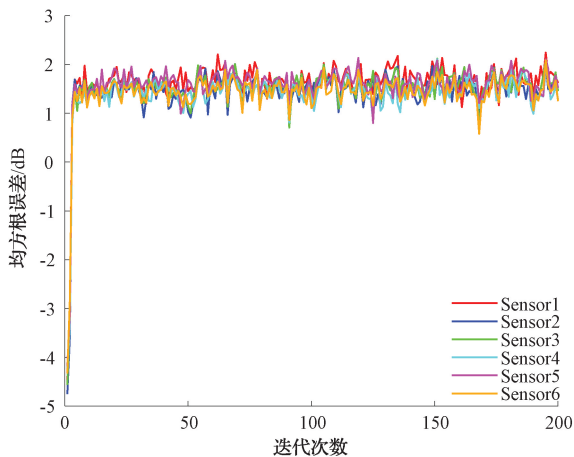


图 3 FWD-MCKF 下各节点的性能
Fig. 3 Performance of each node under FWD-MCKF

为了突出所设计融合权值方法的优越性，将 FWD-MCKF 的权值选取方法与分布式融合中常用的 Metropolis 权值方法进行比较，并选择不同的置信水平函数进行

对比。图 4 和表 2 所示为不同融合权值选取方法的估计性能，实线表示置信水平函数为 $c(r) = 1/r$ 的 FWD-MCKF 的均方根误差，虚线表示 $c(r) = 1/r^2$ 的 FWD-MCKF 的均方根误差 (FWD-MCKF1)，点线表示选择 Metropolis 权的均方根误差 (DMCKF1)。可以得出，FWD-MCKF 方法的估计性能相比 DMCKF1 提升了 27.68%，证明了所提出的权值设计方法是有效的。同时，对于同一传感器网络，选取不同的置信水平函数会导致不同的估计性能。

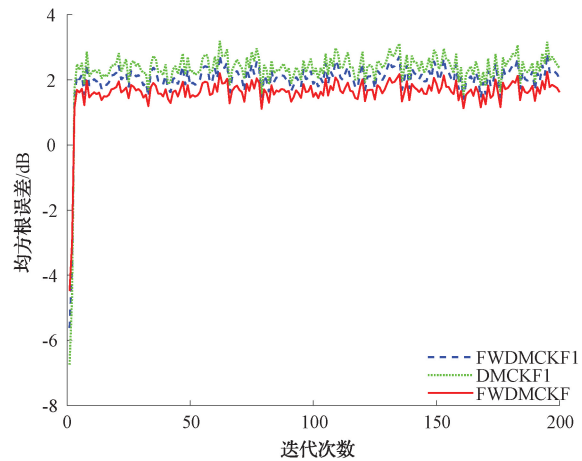


图 4 不同融合权值方法的性能
Fig. 4 Performance of different fusion weight methods

表 2 不同融合权值方法下的 RMSE

Table 2 RMSE under different fusion weight methods

滤波器	x_{k1}	x_{k2}	x_{k3}	x_{k4}
DMCKF1	1.732	1.651	2.040	1.986
FWD-MCKF1	1.558	1.485	1.845	1.797
FWD-MCKF	1.251	1.189	1.479	1.439

4 结论

本文提出了一种基于融合权值设计的分布式卡尔曼滤波算法，用于解决复杂传感器网络中的分布式状态估计问题。在滤波阶段，基于最大相关熵准则来设计卡尔曼滤波，并用一组服从伯努利分布的随机变量来描述传感器测量信息缺失现象。在分布式融合阶段，基于虚拟估计误差和置信水平函数对协方差相交法的融合权值进行设计。同时，证明了所提 FWD-MCKF 算法的稳定性。仿真结果表明，与传统的分布式滤波方法相比，FWD-MCKF 算法不仅提升了分布式融合精度，而且解决了非高斯噪声和系统量测信息缺失的影响。目前，本文算法只考虑了线性模型。在未来研究中，考虑将其扩展到非线性滤波的框架下。此外，本文只对算法进行了仿真验证，下一步考虑采集传感器的实测数据，利用所提分布式算法对其进行融合，以验证该算法在工程应用中的有效性。

参 考 文 献

- [1] 刘军, 刘克诚, 田甜, 等. 基于自适应卡尔曼滤波算法的紧组合导航系统的研究[J]. 电子测量技术, 2019, 42(5): 52-55.
LIU J, LIU K CH, TIAN T, et al. Research on tight integrated navigation system based on adaptive Kalman filter algorithm[J]. Electronic Measurement Technology, 2019, 42(5): 52-55.
- [2] 刘明杰, 陈俊虎, 刘平, 等. 复杂交通流下基于卡尔曼滤波的多目标全生命周期状态估计[J]. 仪器仪表学报, 2024, 45(1): 321-334.
LIU M J, CHEN J H, LIU P, et al. Kalman filter-based multi-object full lifecycle state estimation in complex traffic flow scenario[J]. Chinese Journal of Scientific Instrument, 2024, 45(1): 321-334.
- [3] 王怡苗, 夏振华. 基于 Mahony-EKF 算法的手臂运动姿态测量系统[J]. 国外电子测量技术, 2024, 43(2): 123-130.
WANG Y M, XIA ZH H. Mahony-EKF algorithm-basing on arm motion attitude measurement system[J]. Foreign Electronic Measurement Technology, 2024, 43(2): 123-130.
- [4] JIN H, SUN S. Distributed Kalman filters with random sensor activation and noisy channels [J]. IEEE Sensors Journal, 2021, 21(24): 27659-27675.
- [5] ZHOU J, GU G, CHEN X. Distributed Kalman filtering over wireless sensor networks in the presence of data packet drops [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2019, 64(4): 1603-1610.
- [6] LI W, JIA Y, DU J. Distributed Kalman filter for cooperative localization with integrated measurements[J]. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, 2020, 56(4): 3302-3310.
- [7] TALEBI S P, KANNA S, MANDIC D P. A distributed quaternion Kalman filter with applications to smart grid and target tracking [J]. IEEE Transactions on Signal and Information Processing Over Networks, 2016, 2(4): 477-488.
- [8] CHEN B, WANG J, ZHAO H, et al. Convergence of a fixed-point algorithm under maximum correntropy criterion [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2015, 22(10): 1723-1727.
- [9] IZANLOO R, FAKOORIAN S A, YAZDI H S, et al. Kalman filtering based on the maximum correntropy criterion in the presence of non-Gaussian noise[C]. 2016 Annual Conference on Information Science and Systems (CISS). IEEE, 2016: 500-505.
- [10] CHEN B, LIU X, ZHAO H, et al. Maximum correntropy Kalman filter[J]. Automatica, 2017, 76: 70-77.
- [11] WANG G, LI N, ZHANG Y. Distributed maximum correntropy linear and nonlinear filters for systems with non-Gaussian noises [J]. Signal Processing, 2021, 182: 107937.
- [12] HU C, CHEN B. An efficient distributed Kalman filter over sensor networks with maximum correntropy criterion [J]. IEEE Transactions on Signal and Information Processing over Networks, 2022, 8: 433-444.
- [13] ROHR E R, MARELLI D, FU M. Kalman filtering with intermittent observations: On the boundedness of the expected error covariance [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2014, 59(10): 2724-2738.
- [14] YANG C, ZHENG J, REN X, et al. Multi-sensor Kalman filtering with intermittent measurements[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2018, 63(3): 797-804.
- [15] ZHANG H, SONG X, SHI L. Convergence and mean square stability of suboptimal estimator for systems with measurement packet dropping[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(5): 1248-1253.
- [16] YU D, XIA Y, LI L, et al. Distributed covariance intersection fusion estimation with delayed measurements and unknown inputs [J]. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems, 2019, 51(8): 5165-5173.
- [17] FU X, SONG X. Distributed maximum correntropy Kalman filter with state equality constraints in a sensor network with packet drops [J]. Signal Processing, 2023, 213: 109218.
- [18] LI W, WEI G, HAN F, et al. Weighted average consensus-based unscented Kalman filtering[J]. IEEE Trans Cybern, 2016, 46(2): 558-567.
- [19] ZHAO Y, LI B, QIN J, et al. H_∞ consensus and synchronization of nonlinear systems based on a novel fuzzy model[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2013, 43(6): 2157-2169.
- [20] LIU P, TIAN Y, ZHANG Y. Distributed Kalman filtering with finite-time max-consensus protocol[J]. IEEE Access, 2018, 6: 10795-10802.
- [21] BATTISTELLI G, CHISCI L, MUGNAI G, et al. Consensus-based linear and nonlinear filtering [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2015, 60(5): 1410-1415.
- [22] OLFATI-SABER R, MURRAY R M. Consensus

- problems in networks of agents with switching topology and time-delays[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49(9): 1520-1533.
- [23] SAYED A H, TU S, CHEN J, et al. Diffusion strategies for adaptation and learning over networks: An examination of distributed strategies and network behavior [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2013, 30(3): 155-171.
- [24] FENG Z, WANG G, PENG B, et al. Distributed minimum error entropy Kalman filter [J]. Information Fusion, 2023, 91: 556-565.
- [25] MA Q, ZHANG P, CUI M. VarKFaceNet: An efficient variable depthwise convolution kernels neural network for lightweight face recognition[J]. IEEE Access, 2024, 12: 117472-117482.
- [26] LIU G, TIAN G. Square-root sigma-point information consensus filters for distributed nonlinear estimation[J]. Sensors, 2017, 17(4): 800.
- [27] ZHANG Y, TIAN Y P. Maximum allowable loss probability for consensus of multi-agent systems over random weighted lossy networks [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2012, 57(8): 2127-2132.
- [28] LI S, ZHANG Z, LIU P, et al. The design of distributed filtering based on lattice rule[J]. Signal Processing, 2023, 213: 109185.

作者简介

徐秋灵, 硕士研究生, 主要研究方向为分布式卡尔曼滤波、无人系统导航与控制。

E-mail: x15971712180@163.com

张鹏, 博士, 副教授, 硕士生导师, 主要研究方向为测试计量技术及仪器、自动化测试与控制、智能感知与系统集成。

E-mail: zhangpeng6@nuc.edu.cn

刘鹏(通信作者), 博士, 硕士生导师, 主要研究方向为导航、制导与控制、机器人导航与控制、协同规划与决策。

E-mail: pengliu@nuc.edu.cn