

两轮自平衡机器人系统非脆弱控制器设计*

方 辉¹ 程权成²

(1. 渤海大学工学院 锦州 121013; 2. 辽宁机电职业技术学院华孚仪表学院 丹东 118009)

摘 要:以两轮自平衡机器人系统为研究对象,提出了一种基于线性矩阵不等式(linear matrix inequality, LMI)技术的非脆弱控制器设计方法。通过有效的矩阵不等式变换技术,利用 Lyapunov 函数方法,将基于观测器的控制器存在条件以矩阵不等式的形式给出。不同于已有的控制器设计方法,充分考虑了控制器存在的不确定项扰动,即非脆弱问题。所设计的控制器在存在不确定摄动的情况下,仍能保证系统的稳定性。最后,通过 MATLAB 软件对本文提出方法的有效性进行仿真验证。

关键词:非脆弱控制器;线性矩阵不等式;Lyapunov 函数

中图分类号: TN964 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 120.3030

Design of two-wheeled self-balanced robot non-fragile controller

Fang Hui¹ Cheng Quancheng²

(1. College of Engineering, Bohai University, Jinzhou 121013, China; 2. College of Huafu Instrument, Liaoning Mechatronics College, Dandong 118009, China)

Abstract: According to the system of two-wheeled self-balanced robot, a non-fragile controller is designed via linear matrix inequality (LMI) method in this thesis. Then, by using matrix inequality converter technique and Lyapunov function method, the sufficient condition of controller that based on observer is obtained via linear matrix inequality (LMI) method. Comparing with the existing research method of controller, the problem of non-fragile that controller has uncertainties are consider in this paper. The designed controller can meet the system stability with the uncertain perturbation. Finally, the MATLAB simulation experiment shows the validity of the proposed method.

Keywords: non-fragile controller; linear matrix inequality (LMI); Lyapunov function

1 引 言

两轮自平衡机器人系统由于其广泛的工程实践应用,受到广大学者关注与研究。文献[1]中利用状态反馈法以及串级 PID 控制实现两轮自平衡机器人的原地直立控制,并通过 MATLAB 软件进行仿真控制效果的分析与论证,得出基于状态空间表达式的控制器比基于传递函数的控制器更具备优越性的结论。文献[2]针对自平衡机器人的 3 个控制环节即运动控制、平衡控制以及伺服控制分别进行了 PID 控制器的设计,同时较好地兼顾了控制系统设计中的鲁棒性问题和快速性问题之间的矛盾。文献[3]通过李雅普诺夫稳定性分析的方法,导出控制器的自适应律,

使李雅普诺夫稳定性理论在两轮自平衡机器人系统中得到应用。此外,在典型的控制系统设计中,线性矩阵不等式技术结合 Lyapunov 函数方法的有效性使得其在该领域受到了广泛关注。通过软件 MATLAB 中的 LMI 工具箱可有效解决线性矩阵不等式的求解问题^[4-7]。鉴于上述分析,本文针对两轮自平衡机器人系统的控制问题,提出一种考虑控制器非脆弱问题的控制器求解设计方法。该方法有效的利用了矩阵不等式变换技术以及 Lyapunov 函数方法,将基于观测器的控制器存在条件以矩阵不等式的形式给出。最后,通过 MATLAB 软件对本文提出方法的有效性进行仿真验证。

收稿日期:2016-12

* 基金项目:国家自然科学基金(61304149)、辽宁省自然科学基金(2015020042)、辽宁省高等学校杰出青年学者成长计划(LJQ2015003)项目资助

2 问题描述

本节选取的两轮自平衡机器人系统状态方程见式(1),将针对该系统方程设计基于观测器的非脆弱控制器^[8]。

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\end{aligned}\quad (1)$$

式中: $\boldsymbol{x}(t) = [\boldsymbol{v}^T(t) \quad \boldsymbol{\varphi}^T(t) \quad \dot{\boldsymbol{\varphi}}^T(t) \quad \boldsymbol{\omega}^T(t)]^T$ 为两轮自平衡机器人系统的状态变量;其中, $\boldsymbol{v}(t)$ 的物理定义为轮轴上中心点处的速度,也就是自平衡机器人的前进线速度; $\boldsymbol{\varphi}(t)$ 的物理定义为车身与铅垂线的夹角; $\boldsymbol{\omega}(t)$ 的物理定义为车身转过的角速度; $\boldsymbol{u}(t) = [\boldsymbol{U}_R^T(t) \quad \boldsymbol{U}_L^T(t)]^T$ 为系统输出的控制变量, $\boldsymbol{U}_R(t)$ 表示右驱动电机输入电压, $\boldsymbol{U}_L(t)$ 表示左驱动电机输入电压。 \boldsymbol{A} 、 \boldsymbol{B} 、 \boldsymbol{C} 为系统的系数矩阵。

为处理本文描述的自平衡机器人系统的状态估计问题,选取基于状态观测的控制器模型如式(2)所示,不同于传统的控制器模型,这里考虑了控制器存在的非脆弱问题。

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) &= \hat{\boldsymbol{A}}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + (\boldsymbol{L} + \Delta\boldsymbol{L})(\boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t)) \\ \hat{\boldsymbol{y}}(t) &= \hat{\boldsymbol{C}}\hat{\boldsymbol{x}}(t) \cdot \boldsymbol{u}(t) = (\boldsymbol{K} + \Delta\boldsymbol{K})\hat{\boldsymbol{x}}(t)\end{aligned}\quad (2)$$

式中: $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ 、 $\hat{\boldsymbol{y}}(t)$ 分别为观测器估计的状态变量和输出变量, \boldsymbol{L} 为需要设计的观测器增益, \boldsymbol{K} 为需要设计控制器增益。 $\Delta\boldsymbol{K}$ 、 $\Delta\boldsymbol{L}$ 为控制器及观测器模型中的参数不确定性变量,且具有形式 $\Delta\boldsymbol{K} = \boldsymbol{H}_K \boldsymbol{F} \boldsymbol{E}_K$ 、 $\Delta\boldsymbol{L} = \boldsymbol{H}_L \boldsymbol{F} \boldsymbol{E}_L$, 其中, \boldsymbol{H}_K 、 \boldsymbol{E}_K 、 \boldsymbol{H}_L 、 \boldsymbol{E}_L 为已知的定常矩阵, \boldsymbol{F} 为时变矩阵参数,且满足 $\boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F} \leq \boldsymbol{I}^{[9]}$ 。

为了得到两轮自平衡机器人系统的闭环系统模型,定义一新的变量 $\boldsymbol{x}_e(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t)$, 综合式(1)和(2),经过简单的数学处理后可得到闭环系统:

$$\dot{\boldsymbol{\psi}}(t) = \boldsymbol{G}\boldsymbol{\psi}(t)\quad (3)$$

式中, $\boldsymbol{\psi}(t) = [\boldsymbol{x}^T(t) \quad \boldsymbol{x}_e^T(t)]^T$,

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{K} + \Delta\boldsymbol{K}) & -\boldsymbol{B}(\boldsymbol{K} + \Delta\boldsymbol{K}) \\ 0 & \boldsymbol{A} - (\boldsymbol{L} + \Delta\boldsymbol{L})\boldsymbol{C} \end{bmatrix}。$$

本文的主要研究内容是设计控制器 \boldsymbol{K} 以及观测器 \boldsymbol{L} , 使得式(3)所示的闭环两轮自平衡机器人系统能够在控制器及观测器中存在不确定扰动的情况下实现稳定。下面的3个引理在本文结论的推导过程中起到了重要作用。

引理 1^[10]: 对于任意矩阵 \boldsymbol{X} 和负定矩阵 $\boldsymbol{\Omega} < 0$, 存在常数 α , 使得不等式 $\boldsymbol{X}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{X}^T < -\alpha(\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}^T) - \alpha^2\boldsymbol{\Omega}^{-1}$ 成立。

引理 2^[9]: 对于给定对称矩阵 $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{S}_{11} & \boldsymbol{S}_{21}^T \\ \boldsymbol{S}_{21} & \boldsymbol{S}_{22} \end{bmatrix}$, 那么下述两个条件等价:

- 1) $\boldsymbol{S} < 0$;
- 2) $\boldsymbol{S}_{22} < 0$, $\boldsymbol{S}_{11} - \boldsymbol{S}_{21}^T \boldsymbol{S}_{22}^{-1} \boldsymbol{S}_{21} < 0$ 。

引理 3^[9]: 对于给定适当维数的实矩阵 $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}^T$, \boldsymbol{H} , \boldsymbol{E} , $\boldsymbol{\Delta}^T \boldsymbol{\Delta} \leq \boldsymbol{I}$, 那么可以得出结论, 存在常数 $\sigma > 0$, 使其满足下

面的不等式关系。

$$\boldsymbol{W} + \boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{E})^T \leq \boldsymbol{W} + \sigma^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}^T + \sigma\boldsymbol{E}^T\boldsymbol{E}$$

3 非脆弱控制器设计

下面通过线性矩阵不等式方法, 得出考虑非脆弱问题的控制器及观测器的矩阵不等式的设计方法。

定理 1 针对式(3)所示的两轮自平衡机器人闭环系统, 对于给定的常数 α , 如果存在矩阵 \boldsymbol{X} 、 \boldsymbol{U} 和 \boldsymbol{W} , 使得下述矩阵不等式成立:

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{11} & * & * & * & * & * & * \\ -\boldsymbol{U}^T \boldsymbol{B}^T & -2\alpha\boldsymbol{X} & * & * & * & * & * \\ 0 & \alpha\boldsymbol{I} & \boldsymbol{\Omega}_{33} & * & * & * & * \\ \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{H}_K^T \boldsymbol{B}^T & 0 & 0 & -\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{I} & * & * & * \\ 0 & 0 & \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{H}_L^T \boldsymbol{P} & 0 & -\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{I} & * & * \\ \boldsymbol{E}_K \boldsymbol{X} & -\boldsymbol{E}_K \boldsymbol{X} & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{I} & * \\ 0 & 0 & \boldsymbol{E}_L \boldsymbol{C} & 0 & 0 & 0 & -\boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{I} \end{bmatrix} < 0\quad (4)$$

其中, $\boldsymbol{\Omega}_{11} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}\boldsymbol{U} + \boldsymbol{U}^T \boldsymbol{B}^T$, $\boldsymbol{\Omega}_{33} = \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{W}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{W}^T$ 那么式(3)所示的两轮自平衡机器人闭环系统是稳定的, 并且控制器参数为 $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{X}^{-1}$, 观测器参数为 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{P}_2^{-1} \boldsymbol{W}$ 。

证明: 为了推到本文所述的结论, 选取形如式(5)所示的 Lyapunov 函数:

$$V(\boldsymbol{\psi}(t)) = \boldsymbol{\psi}^T(t) \boldsymbol{P}\boldsymbol{\psi}(t), \boldsymbol{P} > 0\quad (5)$$

对式(5)所示的 Lyapunov 函数等式两边同时求导, 并将式(3)代入 Lyapunov 函数式, 可得到式(6)。

$$\dot{V}(\boldsymbol{\psi}(t)) = \boldsymbol{\psi}^T(t) \boldsymbol{G}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{\psi}(t) + \boldsymbol{\psi}^T(t) \boldsymbol{P}\boldsymbol{G}\boldsymbol{\psi}(t)\quad (6)$$

根据 Lyapunov 稳定性理论, 若 $\dot{V}(\boldsymbol{\psi}(t)) < 0$, 那么闭环两轮自平衡机器人系统是稳定的, 则需满足式(7)所示的不等式条件。

$$\boldsymbol{G}^T \boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{G} < 0\quad (7)$$

这里, 定义矩阵 $\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_1 & * \\ 0 & \boldsymbol{P}_2 \end{bmatrix}$, 同时将 \boldsymbol{P} 及 \boldsymbol{G} 代入式

(7)中, 再左右分别乘以 $\text{diag}\{\boldsymbol{P}_1^{-1}, \boldsymbol{P}_1^{-1}\}$ 和它的转置, 然后先后运用引理 1 和引理 2, 可知存在常数 α 使得式(8)成立。

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_{11} & * & * \\ -\boldsymbol{P}_1^{-1}(\boldsymbol{K} + \Delta\boldsymbol{K})^T \boldsymbol{B}_1^T & -2\alpha\boldsymbol{P}_1^{-1} & * \\ 0 & \alpha\boldsymbol{I} & \boldsymbol{\Psi}_{33} \end{bmatrix} < 0\quad (8)$$

式中:

$$\boldsymbol{\Psi}_{11} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_1^{-1} + \boldsymbol{P}_1^{-1} \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{K} + \Delta\boldsymbol{K})\boldsymbol{P}_1^{-1} + \boldsymbol{P}_1^{-1}(\boldsymbol{K} + \Delta\boldsymbol{K})^T \boldsymbol{B}^T$$

$$\boldsymbol{\Psi}_{33} = \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_2(\boldsymbol{L} + \Delta\boldsymbol{L})\boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}^T(\boldsymbol{L} + \Delta\boldsymbol{L})^T \boldsymbol{P}_2。$$

根据参数不确定性变量的定义式, 对式(8)先后运用引理 3 和引理 2 的条件, 同时定义新的矩阵变量 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{P}_1^{-1}$, $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{K}\boldsymbol{P}_1^{-1}$, $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{P}_2 \boldsymbol{L}$ 便可以得到定理 1 所描述的矩阵不等式条件。定理 1 证毕。

4 仿真实例

为证明本文所提出定理的有效性,这里选取具有如下参数的两轮自平衡机器人系统状态方程^[9]:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) \\ \ddot{\boldsymbol{\varphi}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -127.54 & -2.96 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3\ 017.63 & 157.3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -102.25 \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}(t) \\ \boldsymbol{\varphi}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) \\ \boldsymbol{\omega}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4.61 & 4.61 \\ 0 & 0 \\ -109.25 & -109.25 \\ 61.7 & 61.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_R(t) \\ \mathbf{U}_L(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times [\mathbf{v}(t)^\top \ \boldsymbol{\varphi}(t)^\top \ \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t)^\top \ \boldsymbol{\omega}(t)^\top]^\top$$

通过 MATLAB LMI 工具箱求解定理 1 中的矩阵不等式条件,求得控制器及观测器参数为:

$$\mathbf{K}=10^5 \times \begin{bmatrix} -1.605\ 5 & -0.526\ 9 & -0.070\ 3 & -0.000\ 0 \\ 1.606\ 1 & 0.527\ 2 & 0.070\ 3 & 0.000\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}=10^4 \times \begin{bmatrix} 0.723\ 0 & -1.351\ 1 & -2.772\ 1 & -1.272\ 1 \\ -0.466\ 6 & 0.756\ 4 & 0.077\ 9 & 0.841\ 2 \end{bmatrix}^\top$$

通过 MATLAB 软件的 simulink 仿真功能控制系统模型进行仿真实验^[11],可得到图 1 所示的系统状态响应曲线,通过曲线可以看出系统的各项参数趋于稳定,因此可以说明,本文定理 1 所给出的控制器及观测器求解方法是有效可行的。

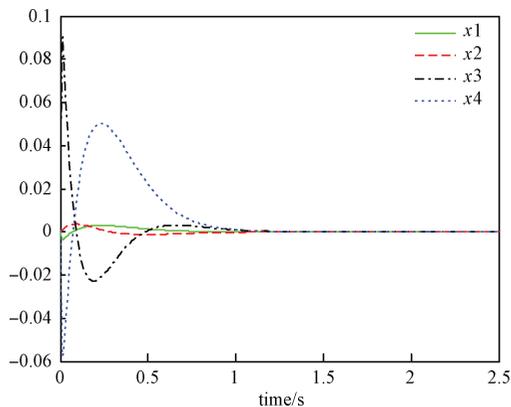


图 1 状态变量响应曲线

5 结论

本文主要研究了两轮自平衡机器人系统的非脆弱控制器设计问题。控制器的设计过程中,考虑通过一个观测器进行系统的状态变量观测,不同于以往的控制器的设计方法,所设计的控制器及观测器考虑了参数不确定性变量的

存在,通过线性矩阵不等式(LMI)技术和 Lyapunov 函数方法,将非脆弱控制器设计条件以矩阵不等式的形式给出,通过 MATLAB 软件 LMI 工具箱求解出控制器及观测器矩阵增益参数。最后,通过两轮自平衡机器人系统的实际参数证明了所提出的方法可有效的求解控制器及观测器参数。

参考文献

- [1] 李杨, 战艺, 周晓明, 等. 两轮自平衡小车的建模与控制[J]. 装备制造技术, 2016(8):27-30.
- [2] 阮晓钢, 孙荣毅, 马圣策, 等. 两轮自平衡机器人运动平衡控制研究[J]. 科学技术与工程, 2014, 14(24):84-88.
- [3] 杨凌霄, 梁书田. 两轮自平衡机器人的自适应模糊平衡控制[J]. 计算机仿真, 2015, 32(5):411-415.
- [4] 林旭梅, 王婵. 四旋翼飞行器的自适应鲁棒滑模控制器设计[J]. 仪器仪表学报, 2015, 36(7):1522-1528.
- [5] GAO J SH, DENG L W, SONG SH M. Fractional order nonsingular terminal sliding mode control for flexible spacecraft attitude tracking[J]. Instrumentation, 2016, 3(1): 21-29.
- [6] 高超, 钱伟. 广域时滞电力系统控制器的优化算法及其应用[J]. 电子测量技术, 2016, 39(5):70-74.
- [7] 王慧, 张晓曼, 宋宇宁. MATLAB 求解电液伺服阀的流量特性曲线[J]. 电子测量与仪器学报, 2015, 29(8): 1236-1244.
- [8] 方辉. 基于 LMI 的两轮自平衡机器人控制器设计[J]. 黑龙江科技大学学报, 2015, 25(3):340-342.
- [9] 程权成, 常晓恒. T-S 模糊系统非脆弱跟踪控制器设计[J]. 电子设计工程, 2014, 9(3):1-4.
- [10] MANSOURI B, MANAMANNI N, GUELTON K, et al. Output feedback LMI tracking control conditions with H_∞ criterion for uncertain and disturbed T-S models[J]. Information Sciences, 2009, 179(4): 446-457.
- [11] 方辉, 程权成. 离散系统量化 H_∞ 控制器设计[J]. 国外电子测量技术, 2016, 35(10):12-15.

作者简介

方辉, 1980 年出生, 实验师, 硕士, 主要研究方向为非线性系统控制。

E-mail: chengquancheng@163.com

程权成, 1989 年出生, 硕士, 主要研究方向为控制理论与算法。