

基于双树复小波变换信号去噪算法研究

黄素真 宋晓梅 任正伟

(西安工程大学电子信息学院 西安 710048)

摘要:离散小波变换被广泛应用于数字信号的去噪处理中,特别是非平稳信号、瞬时时变信号等的去噪,但是有平移敏感性的缺陷。为了克服这种缺陷,文中采用双树复小波变换进行信号去噪,并使用硬阈值、软阈值等准则进行滤波处理。最后采用 SNR(信噪比)和 MSE(均方误差)来评估两者信号去噪效果。结果表明,双树复小波变换能够较好的保存信号的细节信息,其去噪效果优于离散小波变换。

关键词:信号去噪;双树复小波变换;小波变换;信噪比;均方误差

中图分类号: TP751 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.40

Signal denoising algorithm based on double-tree complex wavelet transform

Huang Suzhen Song Xiaomei Ren Zhengwei

(School of Electronic Information, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

Abstract: Discrete wavelet transform is widely used in denoising of digital signals, especially nonstationary signals, instantaneous time-varying signals, but it has the drawbacks of translational sensitivity. In order to overcome the shortcomings of discrete wavelet transform, the paper used the double tree complex wavelet transform to denoise the signal, and used the hard threshold, soft threshold and other criteria to filter the signal. Finally, SNR (signal to noise ratio) and MSE(mean square error) were used to evaluate the effects of signal denoising. The results show that the double wavelet complex wavelet transform which saves the details of the information of the signal is better than discrete wavelet transform in denoising the signal.

Keywords: signal denoising; double tree complex wavelet transform; wavelet transform; signal to noise ratio; mean square error

0 引言

信号在采集和传输的过程中,由于外界环境干扰和本身仪器的影响,难免会有噪声夹杂在其中^[1]。特别是在高精度数据的分析中,很微弱的噪声也会对信号产生巨大的影响,所以在信号分析中,首先要做的就是对信号的去噪处理。

小波变换由于其具有较好的时频特性,在非平稳信号、瞬时时变信号等的去噪方面得到了广泛的应用。但是由于小波变换具有平移敏感性和缺乏方向性等缺点^[2],在提取信号特征时,可能会丢失一些重要信息,产生错误的结果。为了克服离散小波变换的缺陷,Kingsbury 等人^[3]提出了双树复小波变换,双树复小波变换是离散小波变换的相对增强,由于双树复小波变换具有平移不变性,使得

双树复小波变换在处理信号去噪时能够更好的保障信号的细节信息。

1 小波变换原理

小波变换是把某一称为母小波的函数 $\varphi(t)$ 作位移 i ,再在不同的尺度 a 下与待分析信号 $x(t)$ 做卷积:

$$WT(a, i) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi \left(\frac{t-i}{a} \right) dt \quad (1)$$

但是在实际的数字信号处理中,一般是将信号的低频与高频部分分别进行离散小波变换的处理, Mallat 提出了一种信号的塔式分解与重构的算法,如图 1 所示,称为 Mallat 算法^[4]。Mallat 算法在小波变换中地位类似于 FFT 在傅里叶变换中的地位。

$H_0(Z)$ 、 $G_0(Z)$ 表示低通滤波器 $H_1(Z)$ 、 $G_1(Z)$ 表示高

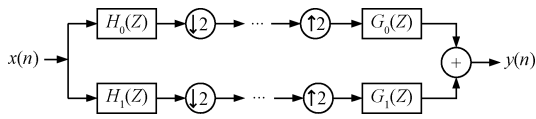


图1 小波的分解与重构

通滤波器, $\downarrow 2$ 表示二抽取, $\uparrow 2$ 表示插值。此时将构建小波基的问题转换成如何求取滤波器的抽头系数。

图1中首先将信号 X 送入低通滤波器 $H_0(Z)$ 与高通滤波器 $H_1(Z)$, 经过二抽取, 得到低频信号(近似分量)与高频信号(细节分量), 特殊设计的滤波器能够实现信号的完美重构。但是二抽取过程带来了很大的信号混叠, 并使得小波具有很大的时移敏感性和缺乏方向性^[5-8], 因此离散小波变换在实现信号去噪的过程中可能丢失信号的信息, 本文使用了双树复小波变换实现信号的去噪。

2 双树复小波变换原理

双树复小波变换(DTCWT)是离散小波变换的相对增强。为了克服二抽取过程带来的信号混叠, 双树复小波的分解过程采用的形式如图2所示, 从图中可以看出双树复小波变换采用了两路小波变换^[9-13], 包含两个平行的小波树, 即树A和树B, 上部树A的叠加滤波器组表示复小波变换的实部; 下部树B的叠加滤波器组表示复小波变换的虚部。在第一层分解中, 让树B相对于树A恰好有一个周期的采样间隔, 这样就能够保证树B恰好采样到树A二抽取丢失的数据。在高层分解中, 使用Q-Shift方法实现两树对应滤波器间的半采样周期延迟。关于滤波器的设计详见参考文献[3]。使用两个平行的小波滤波器同时作用在输入数据 $x(n)$ 上来计算信号 $x(n)$ 的双树复数小波变换, 如图2所示。计算如式(2)、(3)所示。

$$DTCWT(a, i) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \varphi \times \left(\frac{t-i}{a} \right) dt \quad (2)$$

$$\text{小波基: } \varphi(t) = \varphi_h(t) + j\varphi_g(t) \quad (3)$$

式中: $\varphi_h(t)$ 、 $\varphi_g(t)$ 均是实小波。

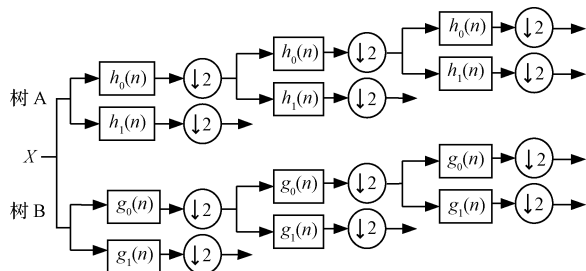


图2 一维双树复小波的分解

3 去噪算法

阈值去噪的基本原理是: 小波变换特别是正交小波变换具有去数据相关的特征^[14], 能够使信号能量集中在大的小波系数中, 而噪声分布在整个小波域中。因此可以通

过选择适当的阈值把信号系数保留, 使大部分噪声系数减少至0。最后将处理后获得的小波系数利用逆变换进行重构, 恢复有效的信号。其具体步骤为:

1) 对噪声信号进行 N 层小波分解, 求出小波系数矩阵 w 。

2) 由式(6)、(7)计算各层高频分量的实部与虚部的阈值, 使用软、硬阈值函数, 即式(4)、(5)对小波系数矩阵进行相应的滤波处理, 得到噪声信号的小波系数矩阵的估计值。

3) 对小波系数矩阵 w 进行逆变换, 得到去噪后的信号。

小波系数的标准阈值化^[15]主要由“硬”或“软”阈值函数决定。其中硬阈值函数为:

$$\begin{cases} z = \text{hard}(w) & |w| > \lambda \\ z = \text{harw}(w) & |w| < \lambda \end{cases} \quad (4)$$

式中: w 和 z 分别是输入和输出小波系数, λ 是选择的阈值。相似的, 软阈值函数表示为:

$$\begin{cases} z = \text{sgn}(w) \max(|w| - \lambda, 0) & |w| > \lambda \\ z = \text{soft}(w) = 0 & |w| \leq \lambda \end{cases} \quad (5)$$

全局阈值是一个完全取决于信号大小的简单的熵测量, 其计算式如式(6)所示。

$$\lambda = \sigma \sqrt{2 \log(k)} \quad (6)$$

式中: k 代表信号的大小, λ 代表阈值。阈值需要对噪声水平进行估计。Donoho 和 Jhonstone 提出了基于MAD(中位数绝对偏差)的噪声水平的鲁棒估计, 计算式如式(7)所示:

$$\sigma(\text{MAD}) = \frac{\text{median}\{|x_{i,j}|\}}{0.6745} \quad (7)$$

4 仿真结果

假设 $s = s_{i,j}$ 是原始信号, $n_{i,j}$ 是随机噪声, 是噪声水平。因此, 噪声信号可以表示为:

$$x = s + \sigma n_{i,j} \quad (8)$$

文中通过改变 σ 的值计算信号的信噪比(SNR)和均方误差(MSE), 从而比较离散小波变换和双树复小波变换的去噪性能。MSE 和 SNR 计算公式如下:

$$\text{MSE} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (x(n) - \overline{x(n)})^2 \quad (9)$$

$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \left[\frac{\sum_{i=1}^M (\overline{x(n)})^2}{\sum_{i=1}^M (x(n) - \overline{x(n)})^2} \right] \quad (10)$$

式中: $x(n)$ 是原始信号, $\overline{x(n)}$ 是去噪后的信号, M 为信号的长度。

文中使用正弦波信息加噪验证双树复小波变换与小波变换的特征。假设含噪信号为:

$$x(n) = \cos(2\pi t) + 0.5 \times \text{rand}(\text{size}(\cos(2\pi t))) \quad (11)$$

去噪后的信号如图3所示。

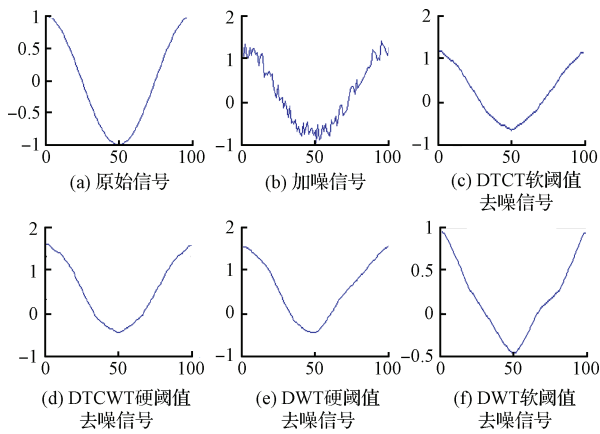


图3 DTCWT和DWT去噪后信号

改变 σ 的值,分别算出输入含噪信号以及在软硬阈值函数下,使用离散小波变换(DWT)和双树复小波(DTCWT)去噪后的信号的信噪比(SNR)和均方误差(MSE)。

信噪比(SNR)越大,去噪效果越好;均方误差(MSE)越小,去噪效果越好。图3(a)、(b)分别表示加噪声前与加噪声后的信号,图3(c)、(d)分别表示双树复小波变换(DTCWT)使用软硬阈值进行去噪后的信号,图3(e)、(f)分别表示小波变换(DWT)使用软硬阈值进行去噪后的信号。改变噪声水平后,分别求出的去噪前与使用双树复小波变换(DTCWT)和离散小波变换(DWT)去噪后信号的信噪比(SNR)和均方误差(MSE)如表1、表2所示。

表1 硬阈值去噪(分解层数 level=4)

σ	INPUT	DWT	DTCWT
0.1	22.167 8/0.002 6	26.339 0/0.092 9	27.308 4/0.114 1
0.3	13.333 7/0.023 2	18.734 7/0.639	19.104 4/0.678
0.5	8.896 7/0.064 5	12.346 8/1.676 3	15.109 5/2.980 1
0.7	5.974 2/0.126 3	9.892 9/4.299 4	11.437 9/5.496 2
0.9	-3.791 3/0.208 9	7.254 6/5.344 8	10.849 1/10.434 8

表2 软阈值去噪(分解层数 level=4)

σ	INPUT	DWT	DTCWT
0.1	22.167 8/0.002 6	26.339 0/0.092 9	27.308 4/0.114 1
0.3	13.333 7/0.023 2	18.734/0.639	19.104/20.672
0.5	8.896 7/0.064 5	12.346 5/1.676 1	15.109 4/2.980 1
0.7	5.974 2/0.126 3	9.892 8/4.299 3	11.437 8/5.496 1
0.9	-3.791 3/0.208 9	7.254 6/5.344 8	10.849 1/10.434 8

文中对含噪信号进行4层小波变换和复小波变换,使用软硬阈值进行滤波处理后进行信号重构,通过观察图表等形式判断两者信号去噪的优劣。从图4、表1和表2可以看出,不管是在硬阈值函数下还是在软阈值函数下,双树复小波变换(DTCWT)的去噪效果都优于离散小波变换(DWT)。但是双树复小波变换的构造比离散小波变换要复杂很多,应根据实际的应用需求选择去噪的方法。

5 结论

为了在一定程度上消除信号中的噪声,文中采用了双树复小波变换对信号进行去噪,通过双树结构消除因二抽取丢失的数据。对每一层高频分量的实部和虚部分别计算阈值并使用硬阈值函数和软阈值函数对噪声信号

进行滤波处理。然后对滤波处理后的小波系数进行逆变换重构信号。最后使用SNR(信噪比)和MSE(均方误差),比较离散小波变换与双树复小波变换在信号去噪中的效率。仿真结果表明,双树复小波变换在信号去噪中更有优势。

参考文献

- [1] 汪剑鸣,代月霞,王琦,等. 基于小波多分辨分析和LSQR的快速EIT图像重建算法[J]. 电子测量与仪器学报, 2016, 30(4):518-525.
- [2] RAVI C K, SRINIVASA P P, VISHWANATHA JS. Wavelet transform based recognition of machined surfaces using computer vision[J]. Applied Mechanics and Materials, 2014, 3304(592): 801-805.

- [3] KINGSBURY N. The dual-tree complex wavelet transform: A new efficient tool for image restoration and enhancement[C]. Signal Processing Conference. IEEE, 2015:1-4.
- [4] LAN H, LI L. The Analysis and Comparison of Mallat and Single-band Reconstruction [J]. Science & Technology & Innovation, 2015.
- [5] 徐伟业. 一种快速离散小波变换算法及其在语音信号中的应用[J]. 计算机工程与应用, 2011, 47(35): 143-146,149.
- [6] 张臣国. 小波分析在信号降噪中的应用研究[D]. 成都:电子科技大学, 2012.
- [7] 矫媛, 黄斌文. 基于小波变换的信号去噪方法综述[J]. 电子制作, 2015(7):55-56.
- [8] 孙萍萍. 基于小波包理论的激波信号去噪研究[J]. 国外电子测量技术, 2016, 35(7):38-42.
- [9] 王芳, 季忠, 彭承琳. 基于双树复小波变换的心电信号去噪研究[J]. 仪器仪表学报, 2013, 34(5):1160-1166.
- [10] SUN E W, MEINL T. A new wavelet-based denoising algorithm for high-frequency financial data mining[J]. European Journal of Operational Research, 2012, 217(3):589-599.
- [11] 李丹, 王慧倩, 柏桐, 等. 基于双树复小波变换和形态学的脉搏信号去噪[J]. 电信科学, 2016, 32(12): 93-98.
- [12] LIU J, LI D, XU J, et al. Extracting subtle feature of target signal based on double tree complex wavelet transformation[C]. International Conference on Electronic and Mechanical Engineering and Information Technology. IEEE, 2011:1177-1180.
- [13] SUN X, ZHOU L. Line Selection Device Based on Double Tree Complex Wavelet[J]. Advanced Materials Research, 2013, 823(823):505-508.
- [14] 邱爱中. 基于平衡正交多小波的信号降噪方法研究[J]. 机械科学与技术, 2012, 31(6): 996-998.
- [15] 李加升, 黄文清, 戴瑜兴. 基于自定义阈值函数的小波去噪算法[J]. 电力系统保护与控制, 2008, 36(19): 21-24.

作者简介

黄素真, 1990年出生, 硕士在读, 主要研究方向为信号与信息处理、图像处理、模式识别等。
E-mail: 1580547672@qq.com